IV. Équations différentielles

1 Primitive d'une fonction

Définition 1. *On appelle* **primitive** *d'une fonction f une solution de l'équation différentielle $y' = f$.*

Exercice 1. *Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^3 - 2t + 5$.*

Lorsque nous aurons défini la notion de ***continuité*** et développé la théorie de l'***intégration***, nous pourrons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Toute fonction f continue admet des primitives, si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction f alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + k$, si F est une primitive de la fonction f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.*

Exercice 2. *Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.*

Exercice 3. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ admet une unique primitive F telle que $F(1) = 1$. Exprimer $F(t)$.*

Exercice 4. *Écrire sous forme intégrale l'unique primitive F s'annulant en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t^2}$.*

2 Équations linéaires du premier ordre

Rappelons tout d'abord que nous avons défini la fonction exponentielle à partir d'une équation différentielle du premier ordre :

Définition 2. *L'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, on l'appelle* **fonction exponentielle** *et on la note $t \mapsto \exp(t)$ ou $t \mapsto e^t$ avec $e = \exp(1)$.*

La fonction exponentielle va donc jouer un rôle fondamental dans la résolution des équations différentielles.

2.1 Équations linéaires du premier ordre sans second membre

Théorème 2. *On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et λ un nombre réel ou complexe.*

Démonstration. Exigible - On pose $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ et on montre que $f' = 0$. □

Exercice 5. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*
- $y' - 2y = 0$
- $y' + (1 + it)y = 0$
- $(t^2 + 1)y' + y = 0$

Propriété 1. *On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ avec la* **condition initiale** *$y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Résoudre l'équation différentielle $y' - \sqrt{t}y = 0$ avec la condition initiale $y(1) = e$.*

Exercice 7. *Si on impose une condition initiale sur y', l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ admet-elle une unique solution ?*

2.2 Équations linéaires du premier ordre avec second membre

La première méthode de résolution appelée ***méthode de variation de la constante*** consiste à chercher une solution de l'équation avec second membre sous une forme modifiée de la solution de l'équation sans second membre en remplaçant la constante multiplicative par une fonction :

Propriété 2. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et f une primitive de la fonction be^A.*

Démonstration. Exigible - On pose $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ et on montre que $f' = be^A$. □

Exercice 8. *Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.*

La seconde méthode de résolution appelée ***méthode de la solution particulière*** consiste à chercher une solution particulière de l'équation avec second membre ce qui permet ensuite de se ramener à une équation sans second membre :

Théorème 3. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y'+a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t)+\lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a, λ un nombre réel ou complexe et $\tilde{y}$ une solution particulière de l'équation différentielle.*

Démonstration. Exigible - On remarque que l'équation différentielle admet une solution $\tilde{y}$ et on montre que $f = y - \tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle sans second membre associée. □

Exercice 9. *Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction trinome du second degré.*

Propriété 3. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Résoudre l'équation différentielle $y' + y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

Le ***principe de superposition*** peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 4. *On considère trois fonctions a, b_1 et b_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1 + b_2$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 11. *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = 2\cos t$ en utilisant les formules d'Euler ainsi que le principe de superposition.*

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Théorème 4. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par :*

- *Si $\Delta \neq 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.*
- *Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_0 la solution double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.*

Démonstration. Exigible - On pose $y(t) = f(t)e^{rt}$ avec r une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et on montre que f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résout. □

Définition 3. *L'équation du second degré associée à une équation différentielle linéaire du second ordre est appelée* **équation caractéristique***.*

Exercice 12. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

- $y'' - 3y' + 2y = 0$
- $y'' + 2y' + y = 0$
- $y'' + 2iy' - 2y = 0$

Corollaire 1. *Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$ et y une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec A et B des nombres réels.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $y(0) = \lambda + \mu = A$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = (\lambda - \mu)i = B$ sont des nombres réels. □

Exercice 13. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.*

Propriété 5. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.*

Démonstration. Exigible - On montre que λ et μ sont solutions d'un système linéaire de déterminant non nul. □

Exercice 14. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ et $y'(0) = 12$.*

3.2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

La méthode de variation de la constante permet de se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

Propriété 6. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{rt}$ où r est une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et f une primitive d'une solution de l'équation différentielle $y' + \left(2r + \dfrac{b}{a}\right) y = \dfrac{1}{a}d(t)e^{-rt}$.*

Démonstration. Exigible - On pose $y(t) = f(t)e^{rt}$ avec r une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et on montre que f est solution d'une équation différentielle linéaire. □

Exercice 15. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2$ en utilisant la méthode de variation de la constante.*

la méthode de la solution particulière permet de se ramener à une équation différentielle sans second membre :

Théorème 5. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t) + f(t)$ où $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation différentielle et f une solution de l'équation sans second membre associée.*

Démonstration. Exigible - On remarque que l'équation différentielle admet une solution $\tilde{y}$ et on montre que la fonction $f = y - \tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle sans second membre associée. □

Exercice 16. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction constante.*

Propriété 7. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + c = d(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.*

Propriété 8. *Exigible.*

Exercice 17. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.*

Le principe de superposition peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 9. *On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et deux fonctions d_1 et d_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 18. *Déterminer une solution particulière à valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y'+y = 3\cos t - 2\sin t$ en utilisant les formules d'Euler ainsi que le principe de superposition.*